

УДК 532.465

# ДВУМЕРНАЯ ЛАГРАНЖЕВА МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА МНОГОФРАКЦИОННЫХ НАНОСОВ В ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЕ МОРЯ

И. А. БРОВЧЕНКО В. С. МАДЕРИЧ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев**Получено 14.03.2005*

Для моделирования широкого круга процессов переноса наносов, включающих перенос наносов и переформирование дна под действием волн и течений, перенос наносов в окрестности сооружений, находящихся на берегу или на некотором расстоянии от него и перенос наносов при дноуглубительных работах и в районах свалки грунтов, разработана новая двумерная лагранжевая модель. Модель может описывать перенос смеси связных и несвязных многофракционных наносов, когда тип донного материала и гранулометрический состав переменны в области моделирования. Лагранжева техника применяется для моделирования переноса взвешенных и влекомых наносов.

Для моделювання широкого кола процесів переносу намулів, які включають перенос намулів та переформування дна під дією хвиль та течій, перенос намулів довкола споруд, які знаходяться на березі або на деякій відстані від нього та перенос намулів при днозаглиблювальних роботах та в районах моделювання переноса наносов при дноуглубительных работах та в районах-звалищах ґрунтів, розроблена нова двовимірна лагранжева. Модель може описувати перенос суміші зв'язних і незв'язних багатofракційних намулів, коли тип донного матеріалу і гранулометричний склад міняються в області моделювання. Лагранжова техніка застосовується для моделювання переносу завислих та тягнених намулів.

A new two-dimensional Lagrangian sediment transport model was developed to simulate a wide-range of sediment transport processes, including sediment transport and bed change under wave and currents effects, sediment transport patterns at nearshore coastal and offshore structures, and turbidity and sediment motion during dredging and dredged material placement. The model can describe transport of mixture of cohesive and non-cohesive multifractional sediments when bed material type, size and gradation vary throughout the model domain. The Lagrangian technique was used to simulate transport of suspended sediments and bed load.

## ВВЕДЕНИЕ

Проведение дноуглубительных работ для улучшения судоходных условий в устьях рек требует использования моделей переноса наносов и переформирования дна. С помощью таких моделей должен решаться ряд задач мониторинга и прогноза в прибрежной зоне моря, в том числе, оценка подвижности наносов и моделирование переноса наносов и переформирования дна под действием волн и течений; моделирование переноса наносов в окрестности сооружений, находящихся на берегу или на некотором расстоянии от него; моделирование переноса наносов при дноуглубительных работах и в районах свалки грунтов. Кроме того, модели должны описывать одновременный перенос связных и несвязных многофракционных наносов.

В последние годы разработан ряд двумерных моделей для решения таких задач (см. напр. [1-4]). Однако, эти модели либо описывают только часть физических процессов либо расчет ведется в рамках отдельных модулей для каждого из типов наносов [4]. В настоящей работе описана модель предназначенная для решения всех перечисленных задач, в которой используется эффектив-

ный лагранжев численный метод моделирования переноса многофракционных наносов. Результаты расчетов сопоставлены с лабораторным экспериментом и приведен пример моделирования дисперсии грунта при дноуглубительных работах в устье рукава Быстрый в дельте Дуная.

## 1. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

### 1.1. Общее описание модели

Модель описывает размыв, перенос и осаждение многофракционных связных и несвязных наносов, а также их смесей. В дальнейшем для краткости будем называть “песком” фракции несвязных наносов начиная с гальки и кончая размером частиц  $D > 0.063$  мм, а “илом” – наносы, включающие собственно ил ( $0.063 > D > 0.004$ ) и глину ( $D < 0.004$ ). Водный столб и дно разделены на ряд слоев: водный слой, активный слой, несколько активных донных слоев и донный слой (Рис. 1). Концентрация наносов в пределах каждого из слоев осреднена по толщине слоя. Скорости течения также осреднены по толщине слоя воды. Взвешенные наносы переносятся течениями и волнами в водном слое. В активном слое частицы песка могут перемещаться в виде влекомых наносов, вовле-

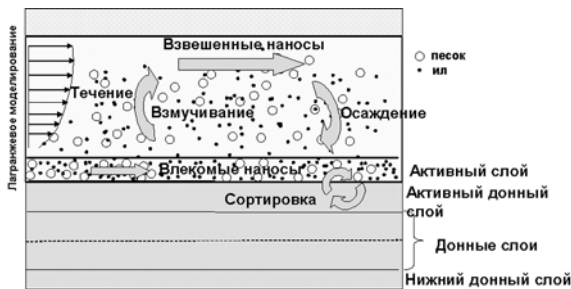


Рис. 1. Схематическое представление процессов переноса наносов в модели

каться в вышележащий слой воды или выпадать в самый верхний (активный) придонный слой. Толщина активного слоя  $h_a$  может изменяться в соответствии с условиями в потоке. Размыв дна и выпадение наносов изменяют толщину активного донного слоя. Если в результате эрозии или дивергенции потока влекомых наносов толщина этого слоя  $h_1$  становится равной нулю, тогда нижележащий активный слой начинает взаимодействовать с водным слоем. Если толщина верхнего активного слоя превосходит некоторое значение  $h_c$ , тогда возникает новый активный донный слой. Неразмываемый донный слой находится ниже активных донных слоев. Модель позволяет рассчитывать перенос любого количества фракций песка. Предполагается, что все частицы песка данного класса размеров в активном слое и активном придонном слое равно подвержены действию потока воды и вовлечению в активный слой, соответственно. Вследствие различной скорости вовлечения частиц разного размера распределение фракций песка в активном слое отличается от распределения в верхнем активном слое. Такая сортировка приводит к эффекту самоотмостки донного материала. Влияние мигрирующих донных гряд на перенос и сортировку донного материала в модели пока не учитывается.

Илы перемещаются в виде взвеси. В активном слое ил может вовлекаться в водный слой и осаждаться в активный донный слой. Моделируется только один класс илов. Консолидация донных слоев в модели не учитывается. Из-за различия свойств обмен с дном ила и песка не одинаков и процессы взмучивания/осаждения смеси могут быть взаимосвязаны. В модели полагается, что взмучивание смеси ила и песка происходит по закономерностям несвязных наносов если концентрация связных наносов ниже критической. Если эта концентрация выше критической, то взмучивание происходит по закономерностям для связных

наносов. В то же время осаждение обеих форм наносов происходит независимо.

## 1.2. Придонные напряжения трения

Предполагается, что движение наносов начинается при превышении модулем придонного напряжения трения  $\tau_b = \rho_w u_*^2$  некоторого порогового значения. Здесь  $u_*$  – динамическая скорость,  $\rho_w$  – плотность воды. В зависимости от решаемых задач, для расчета  $u_*$  по известному полю осредненных по глубине течений и полю волн в модели используется ряд известных соотношений, приведенных ниже.

Соотношение для осредненного по глубине логарифмического профиля имеет вид:

$$u_*^2 = \frac{1}{8} f_c U_c^2 \quad (1)$$

где

$$U_c = \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{U}_c(x, y, t) = (u, v)$  – осредненная по глубине скорость течения. Коэффициенты Дарси-Вейсбаха  $f_c$  рассчитываются из соотношений

$$(f_c/8)^{-1/2} = \begin{cases} 3 + 2.5 \ln \left( \frac{u_* h}{\nu} \right), & \frac{u_* k_s}{\nu} \leq 5, \\ 6 + 2.5 \ln \left( \frac{h}{h_s + 3.3 \frac{u_* h}{\nu}} \right), & 5 \leq \frac{u_* k_s}{\nu} \leq 70 \\ 6 + 2.5 \ln \left( \frac{h}{k_s} \right), & \frac{u_* k_s}{\nu} \geq 70, \end{cases}$$

Здесь  $h$  – толщина столба воды,  $k_s$  – параметр шероховатости дна,  $\nu$  – кинематическая вязкость воды. Для несвязных наносов  $k_s$  определяется диаметром частиц песка  $D_{90}$  и высотой рифелей  $h_r$  (Таблица 1).

Формулы Маннинга и Шези имеют вид:

$$u_* = \frac{g^{1/2} n}{h^{1/6}} U_c, \quad (3)$$

$$u_* = \frac{g^{1/2}}{C_h} U_c, \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $n$  – параметр шероховатости Маннинга, а коэффициент Шези  $C_h$  выведен осреднением логарифмического профиля скорости:

$$\begin{cases} C_h = 18 \log \left( \frac{12h}{3.3\nu/u_*} \right), & \frac{u_* k_s}{\nu} \leq 5, \\ C_h = 18 \log \left( \frac{12h}{k_s} \right), & \frac{u_* k_s}{\nu} \geq 70, \end{cases} \quad (5)$$

Табл. 1. Значения параметра шероховатости  $k_s$  для несвязных наносов.

| Тип донных наносов      | $k_s$ м                  |
|-------------------------|--------------------------|
| Гравий                  | 0.001 – 0.1м             |
| Плоское песчаное дно    | $(1 - 10)D_{90}$         |
| Песчаное дно с рифелями | $(0.5 - 0.1) \times h_r$ |

Формула Бийкера [6] для полного турбулентного напряжения трения, вызванного волнами и течениями имеет вид:

$$u_*^2 = \frac{1}{2} \hat{f}_c U_c^2 + \frac{1}{4} \hat{f}_w U_w^2, \quad (6)$$

где  $U_w$  – максимальная орбитальная скорость у дна,  $\hat{f}_c$  и  $\hat{f}_w$  – коэффициенты сопротивления для течений и волн, соответственно. Коэффициент сопротивления  $\hat{f}_c$  выражается через коэффициент Шези  $C_h$ :

$$\hat{f}_c = \frac{2g}{C_h^2}, \quad (7)$$

или коэффициент Дарси-Вейсбаха

$$\hat{f}_c = \frac{1}{4} f_c, \quad (8)$$

или коэффициент Маннинга

$$\hat{f}_c = 2 \frac{gn^2}{h^{1/3}}, \quad (9)$$

Для волнового коэффициента сопротивления  $f_w$  в режиме развитой турбулентности над шероховатым дном используется формула [5]:

$$f_w = \begin{cases} \exp \left[ 5.213 \left( \frac{k_s}{U_w \sigma} \right)^{0.194} - 5.997 \right] & \text{при } \frac{k_s}{U_w \sigma} < 0.63 \\ 0.3 & \text{при } \frac{k_s}{U_w \sigma} \geq 0.63 \end{cases} \quad (10)$$

Максимальная орбитальная скорость у дна  $U_w$  рассчитывается из соотношений линейной теории волн

$$U_w = \frac{\sigma H}{2 \operatorname{sh} [kh]} \quad (11)$$

где  $\sigma$  – угловая частота,  $H$  – высота волн,  $k$  – волновое число.

Для случая произвольного угла между направлением течения и волн используется формула [7]:

$$u_*^2 = C_b \sqrt{u^2 (A^2 + B^2) + v^2 (B^2 + C^2)}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} C_b &= \frac{1}{8} f_c, \\ A &= U_{wc} + \frac{U_w^2}{U_{wc}} \cos^2 \alpha, \\ B &= \frac{U_w^2}{U_{wc}} \cos \alpha \sin \alpha, \\ C &= U_{wc} + \frac{U_w^2}{U_{wc}} \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha$  – угол распространения волн относительно оси  $x$ , а  $U_{wc}$  задается выражением:

$$U_{wc} = \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + v^2 + U_w^2 + 2(u \cos \alpha + v \sin \alpha) U_w} + \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + v^2 + U_w^2 - 2(u \cos \alpha + v \sin \alpha) U_w}$$

### 1.3. Перенос песка

В модели рассматриваются несвязанные наносы (“песок”) с произвольным числом фракций размеров частиц. Двумерное конвективно-диффузионное уравнение для  $i$ -того класса размеров песка описывает перенос взвешенных наносов заданного размера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_i^s}{\partial t} + \frac{\partial u C_i^s}{\partial x} + \frac{\partial v C_i^s}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial C_i^s}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial C_i^s}{\partial y} \right) = E_i^{(s)} - D_i^{(s)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $C_i^s$  – концентрация  $i$ -той фракции песка в столбе воды ( $\text{кг}/\text{м}^2$ ),  $K$  – коэффициент горизонтальной диффузии,  $E_i^{(s)}$  и  $D_i^{(s)}$  – скорости эрозии и осаждения песка, соответственно. Правая часть уравнения (13) представляет источник/сток взвешенных наносов пропорциональный отклонению фактической концентрации  $c_i^s(a)$  от равновесной концентрации  $i$ -того класса песка  $\rho_s C_{ai}^s$  на отсчетном уровне  $z = a$  над уровнем дна. Здесь  $c_i^s(a)$  определяется из соотношения

$$c_i^s(a) = \frac{C_i^s}{h F_i}, \quad (14)$$

где  $F_i$  – фактор, связывающий концентрацию на отсчетном уровне и среднюю концентрацию в столбе воды [9],  $\rho_s$  – плотность зерен песка. Окончательно, имеем:

$$E_i^{(s)} - D_i^{(s)} = \frac{F_i \rho_s p_{si} h C_{ai}^s - C_i^s}{F_i T_c}, \quad (15)$$

где  $T_c$  – характерное время для перехода концентрации от  $c_i^s(a)$  к равновесной концентрации для

класса песка  $\rho_s C_{ai}^s$ . Для равновесной концентрации был построен ряд полуэмпирических соотношений. Одними из наиболее распространенных являются соотношения [9]:

$$C_{ai}^s = \frac{0.015 D_i T_i^{1.5}}{a D_{*,i}^{0.3}}, \quad (16)$$

$$T_i = \frac{u_*^2}{u_{*,cr,i}^2} - 1, \quad (17)$$

$$D_{*,i} = D_i \left[ \frac{(s-1)g}{\nu^2} \right]^{1/3}, \quad (18)$$

Здесь отсчетный уровень  $a = \max\{0.01h, k_s\}$ ,  $s = \rho_s/\rho_0$ , а  $u_{*,cr}$  – критическая динамическая скорость для начала взмучивания, рассчитываемая с использованием критерия Шилдса

$$u_{*,cr,i} = \sqrt{(s-1)g D_i \Theta_{cr,i}}, \quad (19)$$

где  $\Theta_{cr}$  – параметр мобильности, который аппроксимируется в [9] в виде

$$\Theta_{cr,i} = \begin{cases} 0.24 D_{*,i}^{-1}, & D_{*,i} \leq 4 \\ 0.14 D_{*,i}^{-0.64}, & 4 < D_{*,i} \leq 10 \\ 0.04 D_{*,i}^{-0.1}, & 10 < D_{*,i} \leq 20 \\ 0.013 D_{*,i}^{0.29}, & 20 < D_{*,i} \leq 150 \\ 0.055, & D_{*,i} > 150 \end{cases} \quad (20)$$

Если  $T_i < 0$  то  $C_{eqi} \equiv 0$ , взмучивание отсутствует, а осаждение имеет место при  $C_i > 0$ . Если  $T_i > 0$  и  $C_{eqi} - C_i > 0$ , то осаждение преобладает и  $T_{c,i} = \max\{C_d H/W_{s,i}, DT\}$ , где  $C_d$  – коэффициент осаждения,  $DT$  – шаг по времени. Если  $T_i > 0$  и  $C_{eq,i} - C_i < 0$ , то имеет место взмучивание и  $T_{c,i} = \max\{C_e H/U, DT\}$ , где  $C_e$  – коэффициент взмучивания.

Фактор  $F_i$  рассчитывается по формулам:

$$F_i = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^{Z'} - \left(\frac{a}{h}\right)^{1.2}}{\left(1 - \frac{a}{h}\right)^{Z'} (1.2 - Z'_i)}, \quad (21)$$

$$Z'_i = Z_i + \phi_i = \frac{W_{s,i}}{\beta_i \kappa u_*} + \phi_i,$$

$$\phi_i = 2.5 \left( \frac{W_{si}}{u_*} \right)^{0.8} \left( \frac{c_i(a)}{C_0} \right)^{0.4}, \quad 0.01 < \frac{W_{si}}{u_*} \leq .1$$

Здесь гидравлическая крупность (скорость падения частиц в воде)  $W_{s,i}$  рассчитывается соглас-

но [9]:

$$\frac{W_{s,i}}{g D_i^2 / \nu} = \begin{cases} \frac{D_{*,i}^{3/2}}{18}, & \text{при } D_i \leq 0.1 \\ \frac{D_{*,i}^{3/2}}{D_{*,i}^{3/2}} \left( \sqrt{1 + 0.01 D_{*,i}^3} - 1 \right), & \text{при } 0.1 < D_i \leq 1 \\ 1.1, & \text{при } D_i > 1, \end{cases} \quad (22)$$

где размеры частиц песка даны в миллиметрах. Максимальная объемная придонная концентрация  $C_0 = 0.65$ . Фактор  $\beta$  определяется соотношением

$$\beta_i = 1 + 2 \left( \frac{W_{si}}{u_*} \right)^2, \quad 0.01 < \frac{W_{si}}{u_*} \leq 1$$

Перенос влекомых наносов  $i$ -того класса в активном слое моделируется по формуле [8]. Поток влекомых наносов является вектором

$$\vec{Q}_i = |Q_i| \frac{\vec{U}}{U}, \quad (23)$$

$$|Q_i|/p_{si} = \begin{cases} 0 & T_i < 0 \\ 0.053 \sqrt{(s-1)g} D_i^{1.5} D_{*,i}^{-0.3} T_i^{2.1}, & 0 < T_i < 3 \\ 0.1 \sqrt{(s-1)g} D_i^{1.5} D_{*,i}^{-0.3} T_i^{1.5}, & T_i > 3 \end{cases}$$

где  $p_{si}$  содержание фракции песка, которое определяется как отношение массы частиц одного класса в активном слое на элементе поверхности дна к массе всех частиц наносов содержащихся в этом объеме [1]. Условие сохранения массы смеси имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n p_{si} = 1, \quad (24)$$

Уравнение сохранения для  $i$ -того класса наносов имеет вид:

$$\rho_{si}(1-\varepsilon) \frac{\partial p_{si} \zeta}{\partial t} = \nabla \vec{Q}_i - E_i^{(s)} + D_i^{(s)}, \quad (25)$$

где  $\varepsilon$  – пористость. Изменение уровня дна  $\zeta$  относительно фиксированного уровня рассчитывается суммированием потоков всех фракций песка:

$$\rho_s(1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left( \nabla \vec{Q}_i - E_i^{(s)} + D_i^{(s)} \right) \quad (26)$$

#### 1.4. Перенос ила

Модель включает в себя двумерное уравнение сохранения донного материала:

$$\rho_b \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -E^{(m)} + D^{(m)}. \quad (27)$$

и двумерное уравнение переноса взвешенных наносов, которое имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^{(m)}}{\partial t} + \frac{\partial u C^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial v C^{(m)}}{\partial y} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial C^{(m)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial C^{(m)}}{\partial y} \right) = \\ = E^{(m)} - D^{(m)}, \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $C^{(m)}$  – концентрация ила в водном столбе в кг/м<sup>2</sup>. Обмен илом между дном и водой описывается направленным вверх эрозионным потоком  $E^{(m)}$  и направленным вниз потоком выпадения ила  $D^{(m)}$ .

При  $u_* > u_{*ce}^{(m)}$  скорость вовлечения ила с однородного по характеристикам дна описывается формулой [10]

$$\begin{aligned} E^{(m)} &= E_0, \left( \frac{u_*^2 - u_{*ce}^{(m)2}}{u_{*ce}^{(m)2}} \right), \\ D^{(m)} &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $u_{*ce}^{(m)2} = \tau_{ce}^{(m)} / \rho_w$ ,  $\tau_{ce}^{(m)}$  – критические динамическая скорость и напряжение трения для начала эрозии, соответственно, а  $E_0 = \rho_m h M$  – параметр эрозии,  $\rho_m$  – плотность ила, типичное значение эмпирической постоянной  $M$  равно  $10^{-7}$ .

При  $u_* < u_{*cd}^{(m)}$  поток ила выпадающего на дно описывается формулой Кроне [11]:

$$\begin{aligned} E^{(m)} &= 0, \\ D^{(m)} &= \frac{W_s^{(m)} C^{(m)}}{H} \left( 1 - \frac{u_*^2}{u_{*cd}^{(m)2}} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

когда  $C^{(m)} < C_c^{(m)}$ . Здесь  $W_s^{(m)}$  – гидравлическая крупность,  $u_{*cd}^{(m)2} = \tau_{cd}^{(m)} / \rho_w$ ,  $\tau_{cd}^{(m)}$  – критическая динамическая скорость и критическое касательное напряжение для выпадения ила, соответственно,  $C_c^{(m)} = C_0 H$ , где  $C_0 = 0.3$  кг м<sup>-3</sup> – критическая объемная концентрация ила. Эмпирическая формула [12], связывающая гидравлическую крупность с концентрацией ила имеет вид:

$$W_s^{(m)} = W_{ref}^{(m)} \left( \frac{C^{(m)}}{C_{ref}^{(m)}} \right)^{a_w}, \quad (31)$$

где  $W_{ref}^{(m)}$ ,  $C_{ref}^{(m)}$  являются эмпирическими опорными значениями,  $a_w$  – эмпирическая постоянная. Гидравлическая крупность может рассматриваться также как эмпирический параметр. Критическое напряжение трения для вовлечения и выпа-

дения ила являются функциями плотности влажного грунта  $\rho_b$  [13]:

$$\tau_{ce}^{(m)} = a_e \left( \frac{\rho_b - \rho_l}{1000} \right)^{b_e} + c_e \quad (32)$$

$$\tau_{cd}^{(m)} = a_d \rho_b + c_d \quad (33)$$

где  $a_e = 0.883$ ,  $b_e = 0.2$ ,  $c_e = 0.05$ ,  $\rho_l = 1065$ ,  $a_d = 0.009808$ ,  $b_d = -9.934$ . Значения  $\tau_e$  и  $\tau_d$  изменяются в диапазоне 0.1-1.0 и 0.05-0.25 Н/м<sup>2</sup>, соответственно.

### 1.5. Перенос смеси песка и ила

В этом разделе рассматривается перенос смеси песка и ила. Уравнение сохранения (24) для смеси одной фракции ила и  $n$  фракций песка имеет вид:

$$p_m + \sum_{i=1}^n p_{si} = 1 \quad (34)$$

Здесь  $p_m$  представляет собой относительное содержание ила. а  $p_{si}$  является относительным содержанием  $i$ й фракции песка. Из-за различия физико-химических свойств песка и ила процессы их взмучивания не одинаковы, тогда как для их смеси эти процессы могут быть взаимосвязаны. Лабораторные эксперименты [14] показывают, что при концентрации ила ниже точки геля (0.03-0.18 кг/м<sup>3</sup>) процессы осаждения ила и песка независимы. Взмучивание смеси ила и песка имеет характер несвязанных наносов если содержание ила ниже критической концентрации. При концентрации ила выше критического значения грунт на дне ведет себя как связанный. Согласно [15,16] диапазон перехода между режимами песка и ила составляет 5-10% содержания глины в смеси по сухому весу, которая определяет связанный (когезивный) характер наносов. В прибрежных районах моря и эстуариях соотношение между илом и глиной в обширных районах почти постоянно, что дает возможность, следуя [17-18], выделять один из двух режимов размыва (по типу песка или по типу ила) в зависимости от критического содержания ила  $p_{m,cr}$ . Это значение для Северного моря составляет около 0.3 [18].

Когда содержание ила в активном слое  $p_m < p_{m,cr}$  тогда обмен песка и ила с дном происходит независимо. Соответствующие формулы для взмучивания/осаждения песка остаются теми же. Взмучивание ила описывается соотношением (29)

$$E^{(m)} = p_m E_0 \left( \frac{u_*^2 - u_{*ce}^{(m)2}}{u_{*ce}^{(m)2}} \right), \quad u_* > u_{*ce}^{(m)} \quad (35)$$

в котором изменение содержания ила учитывается множителем  $p_m$ . В режиме несвязанных наносов частицы ила легко смываются с поверхности грунта [14] и  $u_{*ce}^{(m)}$  должно быть много меньше, чем  $u_{*ce}^{(m)}$  в режиме связанных наносов. Осаждение ила описывается (30). Предполагается, что в режиме несвязанных наносов перенос влекомых наносов (песка) линейно убывает с ростом концентрации ила в дне из песка [17]:

$$\vec{Q}_i^{(s)} = \left(1 - \frac{p_m}{p_{m,cr}}\right) \vec{Q}_i, \quad (36)$$

где  $\vec{Q}_i$  – транспорт влекомых наносов для песка.

В режиме связанных наносов ( $p_m \geq p_{m,cr}$ ), взмучивание как ила, так и песка при  $u_* > u_{*ce}^{(m)}$  описывается формулой (29) с поправкой на содержание песка и ила:

$$\begin{aligned} E^{(m)} &= p_m E_0 \left( \frac{u_*^2 - u_{ce}^{(m)2}}{u_{ce}^{(m)2}} \right), \\ E_i^{(s)} &= p_{s,i} E_0 \left( \frac{u_*^2 - u_{ce}^{(m)2}}{u_{ce}^{(m)2}} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Предполагается, что процессы осаждения песка и ила происходят независимо. Они описаны в разделах 1.2-1.3. Для режима связанных наносов транспорт влекомых наносов подавлен:

$$\vec{Q}_i^{(s)} = 0. \quad (38)$$

Уровень дна изменяется в зависимости от процессов взмучивания/осаждения и транспорта влекомых наносов

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{\rho_s} \sum_{i=1}^n \left( \nabla \vec{Q}_i^{(s)} - E_i^{(s)} + D_i^{(s)} \right) - \frac{1}{\rho_m} (E^{(m)} + D^{(m)}), \quad (39)$$

Изменение содержания  $i$ -той фракции песка определяется уравнением

$$\rho_s (1 - \varepsilon) \frac{\partial p_{si} \zeta}{\partial t} = \nabla \vec{Q}_i^{(s)} - E_i^{(s)} + D_i^{(s)}. \quad (40)$$

### 1.6. Горизонтальная турбулентная диффузия

Предполагается, что горизонтальная турбулентная диффузия изотропна с коэффициентом турбулентности, рассчитываемым по формуле для осредненной по глубине параболической турбулентной вязкости:

$$K = A_{xy} c_s u_* \kappa h \quad (41)$$

где  $A_{xy}$  – эмпирическая постоянная, подбираемая в диапазоне  $1 \div 10$ ,  $c_s \approx 1/6$ ,  $\kappa \approx 0.41$  – постоянная Кармана.

### 1.7. Граничные условия

На берегу предполагается отсутствие потока взвешенных наносов. Учтены эффекты затопления и осушения донных грунтов приливами. На жидких границах концентрация наносов задана, когда поток направлен в область расчетов, если поток направлен вовне то используется условие излучения.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

### 2.1. Классификация лагранжевых частиц

Лагранжева техника используется для моделирования взмучивания, выпадения и переноса взвеси. Концентрация взвеси характеризуется ансамблем частиц, а задача переноса сводится к прослеживанию траекторий частиц. Масса взвеси в воде и в активном слое разделена на большое количество частиц одинаковой массы. Каждая частица обладает тремя свойствами в течение моделирования:

1. Состояние (либо “Взвешенная” либо “На дне”)
2. Класс размеров (от 1 до  $n$ -того, “0” класс соответствует илу)
3. Класс источника (от 1 до  $n_s$ -того)

Частицы “На дне” располагаются в активном слое, где они могут двигаться в виде влекомых наносов либо оставаться на дне. Активный придонный слой служит источником частиц для активного слоя когда этот слой теряет массу за счет перехода частиц в взвешенные наносы и/или дивергенции потока влекомых наносов. Он также абсорбирует частицы из активного слоя, когда толщина последнего превосходит некоторое заданное значение. Частицы маркированы классом источника для того чтобы иметь возможность проследить траекторию частиц из заданного источника.

### 2.2. Перенос взвешенных наносов

Для моделирования переноса взвешенных наносов используется лагранжев метод случайных блужданий

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{U}(\vec{x}_i, t) + \vec{U}_{diff}(\vec{x}_i, t). \quad (42)$$

Здесь  $\vec{x}_i(t)$  – координаты  $i$ -той частицы,  $\vec{U} = (u, v)$ , – адвективная составляющая скорости,  $\vec{U}_{diff}$  – “диффузионная” составляющая, которая моделируется методом случайных блужданий:

$$\vec{U}_{diff} = \vec{P}_d \sqrt{6K/\Delta t}, \quad (43)$$

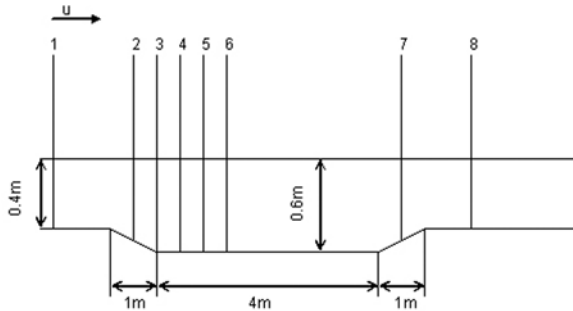


Рис. 2. Профиль дна рабочего участка и положение профилей измерений в эксперименте [20]

Здесь  $\vec{P}_d$  – случайный вектор, равномерно распределенный на интервале  $[-1; 1] \times [-1; 1]$ , коэффициент турбулентности  $K$  рассчитывается по формуле (41). Для численного решения уравнения 42 метод Рунге-Кутты 1-го, 2-го или 4-го порядка. Интерполяция скорости и глубины с произвольной эйлеровой сетки на лагранжевую проводится с использованием алгоритма двумерной интерполяции BIVAR [19]. Для этого сетка триангулировалась, а затем использовалась двумерная полиномиальная интерполяция.

Правая часть уравнения (13) рассчитывается в каждом элементе сетки и для каждой фракции песка. Для каждого элемента сетки по формулам (15)–(21) рассчитывается полное число частиц данного размера которые должны осесть либо быть вовлечены в поток. Эти частицы получают соответствующую метку. Частицы с меткой “На дне” участвуют в переносе влекомых наносов. Вследствие различной скорости вовлечения частиц разного размера распределение фракций песка в активном слое отличается от распределения верхнем активном слое. Такая сортировка приводит к эффекту самоотмостки донного материала, когда крупные частицы в активном слое экранируют поток более мелкого материала из нижележащего донного активного слоя.

Аналогичным образом производится решение уравнения (28) для ила. Взмучивание и выпадение моделируется присвоением частицам соответствующих меток. Численный алгоритм для решения уравнений переноса для смеси включает решение системы уравнений 13 и (28).

Присвоение частицам меток соответствующим классу источника, позволяет проследить за траекторией переноса наносов. для того, чтобы моделировать перенос наносов при проведении дноуглубительных работ были введены три типа источника наносов: точечный, линейный и полигональный

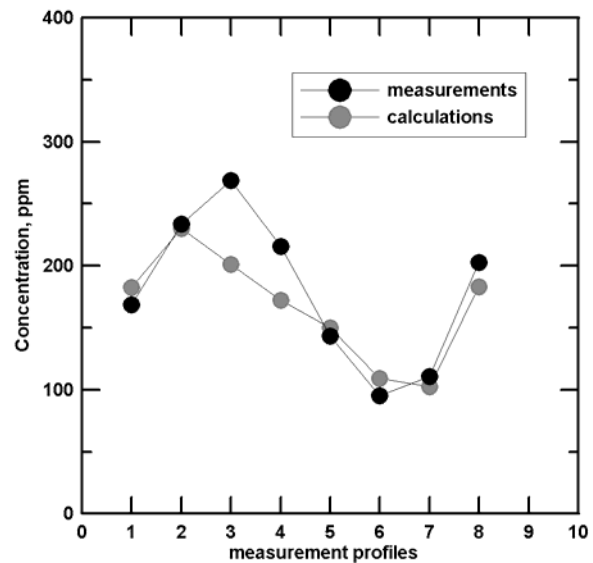


Рис. 3. Сравнение измеренных в эксперименте [20] и рассчитанных средних по глубине концентраций взвешенных наносов

(площадной). Число источников не ограничено.

### 2.3. Расчет переноса влекомых наносов и изменения уровня дна

Перенос влекомых наносов рассчитывался для каждого конечного элемента дна. Частица перемещается со скоростью:

$$U_{bi} = u_* \left( 10 - 7 \sqrt{\frac{\Theta_{cr}}{\Theta}} \right), \quad (44)$$

$$\Theta = \frac{u_*}{(s-1)gD_i} \quad (45)$$

Полное число частиц, движущихся в элементе дна рассчитывается по формуле:

$$N_{bi} = S_E \frac{|Q_i|}{V_p U_{bi}} \quad (46)$$

где  $S_E$  – площадь элемента поверхности,  $V_p$  – объем частицы. Это количество случайно выбранных частиц перемещается в заданном элементе и на каждом шаге во времени пересчитывается распределение частиц между элементами. Толщина активного слоя для каждой градации размеров остается постоянной во времени. Избыток частиц поглощается в активный донный слой или же новые частицы поступают в активный слой из активного донного при дивергенции потока влекомых наносов. Толщина активного донного слоя изменяется в соответствии с (39)–(40).

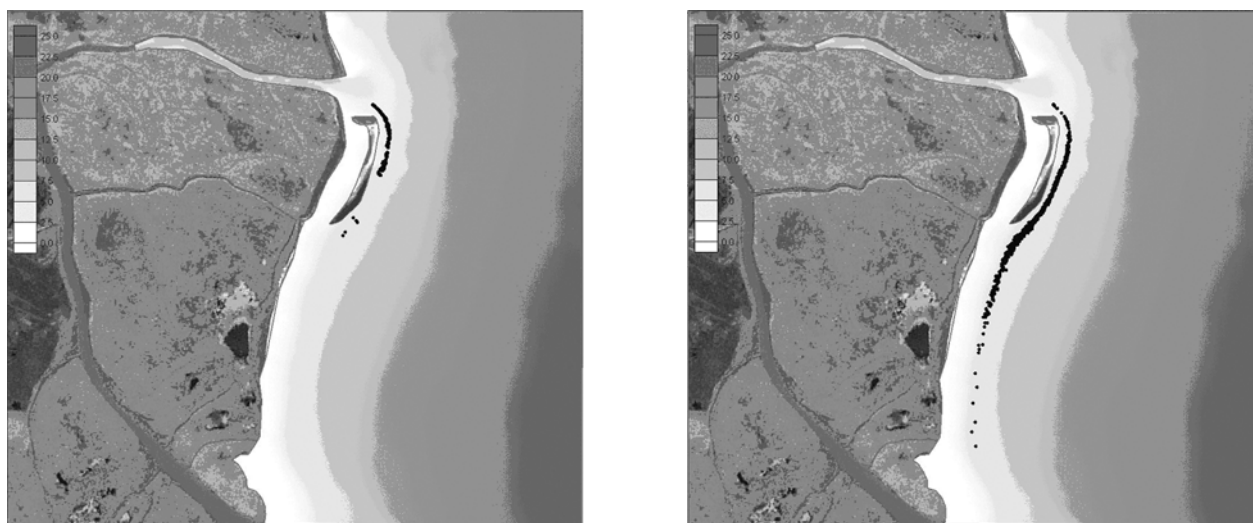


Рис. 4. Рассчитанный перенос песка (а) и ила (б) при дноуглубительных работах на बारे рукава Быстрый

### 3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

#### 3.1. Лабораторный эксперимент

Были проведены расчеты для условий лабораторного эксперимента [20], в котором моделировалась заносимость судоходного канала. Эксперимент проводился в лотке длиной 30 м, шириной 0.5 м и глубиной 0.4 м. Профиль дна рабочего участка и положение профилей измерений приведены на рис. 2. Слой наносов на дне состоял из фракции мелкого песка диаметром 0.15 мм. Скорость потока на входе в лоток была 0.5 м/с и взвешенный песок поступал со скоростью 0.04 кг/(м с). Течения моделировались с помощью двумерной конечно-элементной модели ADCIRC [21].

Для сопоставления с результатами расчетов измеренные профили концентрации взвешенных наносов были осреднены по глубине. Сравнение проводилось после того как рассчитанный поток достигал стационарного состояния после первых 10 мин. Полное число лагранжевых частиц во взвешенных и влекомых наносах составляло около 30000. Мгновенная концентрация осреднялась по интервалу 10 мин. На рис. 3 приведены измеренные и рассчитанные концентрации взвешенных наносов в среднем сечении лотка. Результаты измерений и расчетов неплохо согласуются, за исключением профилей в сечениях 2 и 3, что может быть объяснено трансформацией профилей концентрации взвешенных наносов в области замедления потока, где эти профили могут быть не близки к равновесным профилям [9], использованных в двумерной модели.

#### 3.2. Моделирование дисперсии грунта при дноуглубительных работах в устье рукава Быстрый

Дноуглубительные работы в судоходном канале в рукаве Быстрый в дельте Дуная, которые начались в 2004 году и продолжающееся строительство защитной дамбы предназначенной для уменьшения заносимости судоходного канала сделали необходимыми исследования переноса наносов в канале и морской части устья Быстрого [22]. Лагранжева модель использовалась для оценки разноса грунта с места дноуглубительных работ на बारे Быстрого (Рис. 4). Для моделирования поля течений использовалась модель ADCIRC. Расчетная область была покрыта сеткой из 8500 конечных элементов. Поле течений для типичных для августа условий моделировалось при вдольбереговом потоке южного направления с максимальной скоростью 0.3 м/с и северном ветре со скоростью 10 м/с. Расходы Быстрого и расположенных южнее Восточного и Цыганского рукавов составляли 585, 85 и 63 м<sup>3</sup>/с, соответственно. На рис. 4 показана дисперсия наносов при дноуглубительных работах для двух типов материала: песка с диаметром частиц 0.2 мм и ила размером 0.01 мм. Результаты моделирования показывают в частности, что песок переносится на расстояние не более 3 км, тогда как ил распространяется во взвешенном состоянии на расстояние до 5–6 км.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведена новая двумерная лагранжевая модель, которая описывает перенос смеси связных

и несвязных многофракционных наносов, когда тип донного материала и гранулометрический состав переменны в области моделирования. Лагранжева техника применяется для моделирования переноса взвешенных и влекомых наносов. Модель воспроизводит основные процессы переноса наносов и переформирования дна, включая эффекты самоотмостки. Результаты расчетов неплохо согласуются с лабораторным экспериментом [20]. Приведен пример моделирования дисперсии грунта при дноуглубительных работах в устье рукава Быстрый в дельте Дуная.

Настоящая работа выполнена в рамках проектов CRDF FSTM UM2-5013-KV-03 и NSTM UKG2-582-KV-05.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Spasojevic M., Holly F. M. 2-D bed evolution in natural watercourses-new simulation approach // J. Hyd. Engr.- 1990.- **116**.- P. 425-444.
2. Jia Y., Wang S. CCHE2D: a two-dimensional hydrodynamic and sediment transport model for unsteady open channel flows over loose bed.- Technical Report: No. CCHE-TR-97-2: School of Engineering. The University of Mississippi, 1997.- 38 p.
3. Donnell B. P. (Ed.) Users Guide to SED2D WES Version 4.5.- Engineer Research And Development Center: Waterways Experiment Station Coastal and Hydraulics Laboratory, 2001.- 164 p.
4. Mike-21 CAMS Coastal Area Morphological Shell.- DHI Water&Environment: 2003, Users Guide.- 96 p.
5. Swart, D. H. Offshore sediment transport and equilibrium beach profiles.- Delft Hydr. Lab. Publ. 131: Delft Hydraulics, 1974.- 164 p.
6. Bijker E.W. Longshore transport computation. // J. Waterways, Harbours and Coastal Engineering.- 1971.- **97**.- P. 687-801.
7. Nishimura, H. Computation of nearshore current // Nearshore dynamics and coastal processes. K. Horikawa, ed.).- University of Tokyo Press, Tokyo, Japan, 1988.- P. 271-291.
8. Van Rijn L. C. Sediment transport, Part I: Bed load transport // J. Hyd. Engr.- 1984.- **110**.- P. 1431-1455.
9. Van Rijn L. C. Sediment transport, Part II: Suspended load transport // J. Hyd. Engr.- 1984.- **110**.- P. 1613-1641.
10. Partheniades E. Erosion and deposition of cohesive soil // J. Hydr. Div. ASCE.- 1965.- **91**.- P. 105-139.
11. Krone R. B. Flume Studies of the Transport of Sediment in Estuarial Processes.- Final Report: Hydraulic Engineering Laboratory and Sanitary Engineering Research Laboratory, University of California, Berkeley, 1962.- 120 p.
12. Ariathurai R., Krone R. B. Finite element model for cohesive sediment transport // J. Hydr. Div. ASCE.- 1976.- **104**.- P. 323-328.
13. Hwang, K.-N., Mehta A. J. Fine sediment erodibility in Lake Okeechobee.- Report UFL/COEL-89/019: Coastal and Oceanographic Engineering Dept., University of Florida, Gainesville, 1989.- 120 p.
14. Torfs H., Mitchener H., Huysentruit H., Toorman E. Settling and consolidation of mud/sand mixtures // Coastal Eng.- 1996.- **29**.- P. 27-45.
15. Dyer K. R. Coastal and estuarine sediment dynamics.- Wiley-Interscience Publ.: New York, 1986.- 324 p.
16. Van Ledden M., Van Kesteren W.G.M., Winterwerp J.C. A conceptual framework for the erosion behaviour of sand-mud mixtures // Continental Shelf Research.- 2004.- **24**.- P. 1-11.
17. Van Ledden M., Wang, Z.B. Sand-mud morphodynamics in an estuary // Proceedings 2nd symposium on River, Coastal and Estuarine Morphodynamics Conference.- Obihiro, Japan, 2001.- P. 505-514.
18. Van Ledden M. A process based sand-mud model., Fine sediment dynamics in the marine environment // Fine sediment dynamics in the marine environment. J.C. Winterwerp and C. Kranenburg eds.- Elsevier, 2002.- P. 577-594.
19. Akima H. On estimating partial derivatives for bivariate interpolation of scattered data // Rocky Mountain J. of Mathematics.- 1984.- **14**.- P. 25-30.
20. Van Rijn L. C. Model for sedimentation predictions // Proc. XIX Congr. IAHR, pt.3.- New Delhi, India, 1981.- P. 1-9.
21. Luettich R., Westerink J. ADCIRC: a (parallel) advanced circulation model for oceanic, coastal and estuarine waters.- Technical Report: U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Vicksburg, 2000.- 115 p.
22. Михайлов В.Н. (ред.) Гидрология дельты Дуная.- Москва: ГЕОС, 2004.- 448 б.