

УДК 532.465

ТРЕХМЕРНАЯ ЛАГРАНЖЕВА МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА МНОГОФРАКЦИОННЫХ НАНОСОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ОПИСАНИЮ ГРАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

И. А. БРОВЧЕНКО,* В. С. МАДЕРИЧ**

* Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

** Department of Environmental Science, Hankuk University of Foreign Studies, Yongin Shi, Kyoungki Do, Korea

Получено 16.06.2007

Предложена новая трехмерная лагранжева модель переноса связанных и несвязанных многофракционных наносов когда тип донного материала и гранулометрический состав переменны в области моделирования. Модель сопряжена с трехмерными моделями гидродинамики, в которых используется сигма-система координат, позволяющая естественным образом описывать перенос в пограничном слое и переформирование дна. Результаты расчетов сопоставлены с аналитическим и численным решениями эйлеровых задач и лабораторным экспериментом. Модель применена к задаче зимней конвекции на арктическом шельфе, которая вызывает трогание наносов на склонах и усиление плотностных гравитационных течений за счет взвеси.

Запропонована нова тривимірна лагранжева модель переносу зв'язних та незв'язних багатofракційних намулів у випадку коли тип донного матеріалу та його гранулометричний склад змінні в області моделювання. Модель спряжена з тривимірними моделями гідродинаміки, в яких використовується сігма-система координат, що дозволяє природним чином описувати перенос в пограничному шарі та переформування дна. Результати розрахунків співставлені з аналітичним та чисельним розв'язками ейлерових задач та лабораторним експериментом. Модель застосована до задачі зимової конвекції на арктичному шельфі, що викликає рушення намулів на схилах та підсилення густинних гравітаційних течій за рахунок намулів.

A new three-dimensional Lagrangian sediment transport model for cohesive and non-cohesive sediment for the case when bottom material type and its grain-size composition are variable in the modeling area is proposed. The model is coupled with three-dimensional hydrodynamic models which use sigma-coordinate system that allow to describe naturally transport in boundary layer and bottom morphology. Calculation results were validated on the numerical and analytical solutions of Euler problems and laboratory experiment. Model was applied for the case study of winter convection on the Arctic shelf which causes triggering of sediment down slope movement and enhancement of the gravity current at the cost of sediment.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование переноса взвеси в воздушной и водной средах представляет собой сложную задачу, особенно в случае гравитационных взвесенесущих потоков [1] в которых важно взаимодействие полей взвеси и течений. Примером таких течений на шельфе океанов и морей являются, например, мутьевые потоки в подводных каньонах на склонах. Дополнительные сложности возникают, когда взвесенесущие потоки являются полидисперсными и когда плавучесть в гравитационных течениях поддерживаются разностью температуры и солености наряду со взвесью. Взвесенесущие потоки из устьев рек в море [2] и шельфовая конвекция в полярных морях [3] относятся к такому типу течений.

В последние годы был разработан ряд трехмерных эйлеровых и лагранжевых моделей переноса наносов (см. напр. [4-7]). Лагранжевы модели [6-7] имеют ряд преимуществ по сравнению с эйлеровыми моделями, которые обусловлены естественным описанием транспорта частиц и возможно-

стью описания переноса на масштабах меньших шага эйлеровой сетки. Однако, в отличие от эйлеровых моделей [4-5], в известных трехмерных лагранжевых моделях не рассматриваются процессы переноса многофракционных наносов. Обратное влияние сил плавучести, вызванных наличием взвеси также учитывалось лишь в некоторых эйлеровых моделях (напр. [1-3]).

В настоящей работе описана трехмерная лагранжева модель переноса связанных и несвязанных многофракционных наносов, являющаяся обобщением двумерной модели [8]. Модель сопряжена с трехмерными моделями гидродинамики, в которых используется сигма-система координат, позволяющая естественным образом описывать перенос в пограничном слое и переформирование дна. Результаты расчетов сопоставлены с аналитическими и численными решениями эйлеровых задач. Приведены результаты моделирования переноса взвеси в лабораторном канале [9]. Модель применена к задаче зимней конвекции на арктическом шельфе, когда конвективные потоки вызывают трогание наносов на склонах и усиление плот-

ностных гравитационных течений за счет взвеси.

1. ЛАГРАНЖЕВА МОДЕЛЬ

1.1. Общее описание модели

Так же как и в [8] трехмерная лагранжева модель описывает размыв, перенос и осаждение многофракционных связных и несвязных наносов, а также их смесей. В дальнейшем для краткости будем называть “песком” фракции несвязных наносов начиная с гальки и кончая размером частиц $D > 0.063$ мм, а “илом” – наносы, включающие собственно ил ($0.063 \text{ мм} > D > 0.004$ мм) и глину ($D < 0.004$ мм). Водный столб и дно разделены на ряд слоев: водный слой, активный слой, несколько донных слоев и нижний донный слой (Рис. 1). Взвешенные наносы переносятся течениями и волнами в водном слое. В активном слое (АС) частицы песка могут перемещаться в виде влекомых наносов, вовлекаться в вышележащий слой воды или выпадать в самый верхний (активный) донный слой (АДС). Если в результате эрозии или дивергенции потока влекомых наносов толщина АДС h_{AB} становится равной нулю, тогда нижележащий донный слой начинает взаимодействовать с водным слоем и становится АДС. Если толщина АДС превосходит некоторое значение $h_{AB}^{(c)}$, тогда возникает новый донный слой. Неразмываемый нижний донный слой находится ниже донных слоев. Модель позволяет рассчитывать перенос любого количества фракций песка. Предполагается, что все частицы песка данного класса размеров в АС и АДС равно подвержены действию потока воды и вовлечению в водный слой и АС, соответственно. Распределение фракций песка в АС отличается от распределения в АДС вследствие различной скорости вовлечения частиц разного размера в водный слой. Такая сортировка приводит естественным образом к эффекту самоотмостки донного материала. Влияние мигрирующих донных гряд на перенос и сортировку донного материала в модели не учитывается.

Илы перемещаются в виде взвеси только в водном слое, вовлекаясь в него из АДС и осаждаясь в АДС. Моделируется только один класс илов. Консолидация донных слоев в модели не учитывается. Процессы взмучивания песка и ила в смеси могут быть взаимосвязаны. Условие сохранения массы смеси в АДС, включающей одну фракцию ила и n фракций песка имеет вид:

$$p_m + \sum_{i=1}^n p_{si} = 1 \quad (1)$$



Рис. 1. Схематическое представление процессов переноса наносов в лагранжевой модели [8]

где p_{si} и p_m содержание i -й фракции песка и фракции ила, соответственно, которое определяется как отношение массы частиц одного класса в АДС на элементе поверхности дна к массе всех частиц наносов содержащихся в этом объеме. Следуя [10–11] полагается, что взмучивание смеси ила и песка происходит по закономерностям несвязных наносов если содержание связных наносов в АДС p_m ниже критического значения $p_{m,cr}$ и по закономерностям для связных наносов $p_m > p_{m,cr}$ если концентрация связных наносов в АДС выше критической. В то же время осаждение обеих форм наносов происходит независимо. Значение $p_{m,cr}$ для Северного моря, например, равно примерно 0.3 [10].

1.2. Перенос взвешенных наносов

Лагранжева техника используется для моделирования взмучивания, выпадения и переноса взвеси. Концентрация взвеси характеризуется ансамблем частиц, а задача переноса сводится к прослеживанию траекторий частиц. Масса взвеси в водном слое и в АС разделена на большое количество частиц одинаковой массы. Каждая частица обладает тремя свойствами в течение моделирования:

1. Состояние (либо “Взвешенная” либо “На дне”)
2. Класс размеров (от 1 до n -того, “0” класс соответствует илу)
3. Класс источника (от 1 до n_s -того)

Частицы “На дне” располагаются в АС, где частицы песка и ила могут оставаться на дне. Частицы песка в АС могут также двигаться в виде влекомых наносов. АДС служит источником частиц для АС когда этот слой теряет массу за счет перехода частиц в взвешенные наносы и/или дивергенции потока влекомых наносов. Он также абсорбирует частицы из АС, когда толщина последнего h_A

превосходит некоторое заданное значение. Взвешенные частицы ила характеризуются диаметром “хлопьев” D_{floc} , образующихся в результате слипания (флоккуляции) частиц в турбулентном водном слое. Частицы маркированы классом источника для того чтобы иметь возможность проследить траекторию частиц из заданного источника.

Для моделирования переноса взвешенных наносов в водном слое используется лагранжева модель случайных блужданий (Random Dispersion Model или RDM), в которой смещения частицы моделируются как случайный марковский процесс [12]. Уравнения для перемещений частицы $d\vec{x} = (dx, dy, dz)$ на каждом шаге по времени dt имеют вид

$$dx = udt + \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} \right) dt + \sqrt{2K} d\xi_x, \quad (2)$$

$$dy = vdt + \left(\frac{\partial K_y}{\partial y} \right) dt + \sqrt{2K} d\xi_y, \quad (3)$$

$$dz = wdt + w_s dt + \left(\frac{\partial K_z}{\partial z} \right) dt + \sqrt{2K} d\xi_z. \quad (4)$$

Здесь $\vec{U} = (u, v, w)$ – адвективная составляющая скорости частицы; $\vec{x}(t) = (x, y, z)$ – координаты частицы; ось z направлена вверх, а начало координат $z = 0$ расположено на невозмущенной поверхности воды; w_s – скорость гравитационного осаждения частиц в воде, K_x, K_y, K_z – ненулевые диагональные элементы тензора коэффициентов турбулентной диффузии, в модели полагается $K_x = K_y = K$; $d\xi_x, d\xi_y, d\xi_z$ – нормально распределенные случайные величины с отклонением равным dt .

Смещение каждой частицы рассчитывалось с помощью схемы Эйлера с дискретным временным шагом $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ следующим образом

$$\Delta x_i = udt + \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right) \Delta t + P_x \sqrt{6K \Delta t}, \quad (5)$$

$$\Delta y_i = v \Delta t + \left(\frac{\partial K}{\partial y} \right) \Delta t + P_y \sqrt{6K \Delta t}, \quad (6)$$

$$\Delta z_i = w \Delta t - w_s \Delta t + \left(\frac{\partial K_z}{\partial z} \right) \Delta t + P_z \sqrt{6K_z \Delta t}, \quad (7)$$

где P_x, P_y, P_z – случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[-1; 1]$. Трехмерные поля скорости и коэффициентов турбулентной диффузии рассчитываются с помощью гидродинамической модели. Эти значения линейно интерполируются в пространстве и времени для каждой частицы.

1.3. Параметризация потока наносов между водным слоем и активным донным слоем в режиме несвязных наносов

Гидродинамика взаимодействия частицы взвеси на дне с потоком достаточно сложна и потоки взвеси между водным слоем и АС в модели параметризуются на основании известных полуэмпирических соотношений. Турбулентный поток взвешенных несвязных наносов i -го класса E_s на уровне $z = -H + a$ описывается следующим образом

$$K_z \frac{\partial C_{s,i}}{\partial z} = -E_s = -w_{s,i} C_{a,i}, \quad (8)$$

где $C_{s,i}$ – концентрация для i -того класса песка, $C_{a,i}$ – равновесная концентрация для этого класса песка на некотором отсчетном уровне a над дном, в качестве которого примем толщину АС h_A . Для равновесной концентрации был построен ряд полуэмпирических соотношений. Одними из наиболее распространенных являются соотношения [14]:

$$C_{a,i}^s = \rho_s \frac{0.015 D_i T_i^{1.5}}{a D_{*,i}^{0.3}}, \quad (9)$$

$$D_{*,i} = D_i \left[\frac{(s-1)g}{\nu^2} \right]^{1/3}, \quad (10)$$

$$T_i = \frac{u_*^2}{u_{*,i}^2 (1 + p_m^\beta)} - 1, \quad (11)$$

где ρ_s – плотность зерен песка; ν – кинематическая вязкость воды; $s = \rho_s / \rho_w$, где ρ_w – плотность воды; D_i – размер частиц песка i -того класса; u_* – динамическая скорость; $u_{*,i,cr}$ – критическая динамическая скорость для начала взмучивания, рассчитываемая с использованием критерия Шилдса

$$u_{*,i,cr} = \sqrt{(s-1)g D_i \Theta_{cr,i}}, \quad (12)$$

где $\Theta_{cr,i}$ – параметр мобильности, который аппроксимируется в [14] в виде

$$\Theta_{cr,i} = \begin{cases} 0.24 D_{*,i}^{-1}, & D_{*,i} \leq 4 \\ 0.14 D_{*,i}^{-0.64}, & 4 < D_{*,i} \leq 10 \\ 0.04 D_{*,i}^{-0.1}, & 10 < D_{*,i} \leq 20 \\ 0.013 D_{*,i}^{0.29}, & 20 < D_{*,i} \leq 150 \\ 0.055, & D_{*,i} > 150 \end{cases} \quad (13)$$

Следуя [11], в выражении (11) для параметра T_i учтено влияние содержания ила, приводящее к тому, что с увеличением доли ила в АДС значения динамической скорости при которых отсчетная концентрация равна нулю возрастают с увеличением доли ила в АДС. Параметр $\beta = 0.75 - 1.25$ [11].

Скорость падения частиц песка в воде $w_{s,i}$ рассчитывается согласно [14]:

$$\frac{w_{s,i}}{gD_i^2/\nu} = \begin{cases} \frac{D_{*,i}^{3/2}}{18}, & \text{при } D_i \leq 0.1 \\ \frac{D_{*,i}^{3/2}}{D_{*,i}^{3/2}} \left(\sqrt{1 + 0.01D_{*,i}^3} - 1 \right), & \text{при } 0.1 < D_i \leq 1 \\ 1.1, & \text{при } D_i > 1, \end{cases} \quad (14)$$

где размеры частиц песка даны в миллиметрах.

Рассмотрим задание граничных условий для i – того класса песка в лагранжевом методе на уровне h_A над поверхностью дна $z = -H$. В дальнейшем для простоты индекс i в выводе опустим. Поток песка каждого класса за счет взмучивания моделируется путем порождения новых частиц данного класса на уровне h_A . Количество новых частиц возникающих за один временной шаг равно:

$$N = \frac{w_s C_a \Delta t}{m_p} \quad (15)$$

где m_p – масса одной частицы. Поток частиц в дно за счет осаждения D_s должен быть равен:

$$D_s = w_s C_s^A \quad (16)$$

где C_s^A – концентрация песка данного класса на уровне h_A . Каждая частица, находящаяся на уровне $z > h_A$ может пересечь границу АС $z = h_A - H$ за один временной шаг при движении согласно алгоритму (5)-(7) с некоторой вероятностью $p(z)$. Причем в каждый момент времени можно выделить придонный слой, толщиной Δz_{bot} для которого

$$\left\{ \begin{array}{ll} p(z') = 0, & z' < \Delta z_{bot} \\ p(z') > 0, & z' > \Delta z_{bot} \end{array} \right\}, \quad (17)$$

где $z' = z - h_A + H$. При этом толщина слоя Δz_{bot} зависит от временного шага, коэффициента турбулентной диффузии и скорости осаждения. Количество взвеси данного класса, которое за один временной шаг пересекло границу АС можно выразить формулой:

$$F = \int_0^{\Delta z_{bot}} p(z') C_s(z') dz' \quad (18)$$

Предположим, что частица, которая пересекла границу с вероятностью q остается в АС, а с вероятностью $1 - q$ возвращается в исходное положение. Тогда согласно (16) необходимо, чтобы выполнялось равенство:

$$q \int_0^{\Delta z_{bot}} p(z') C_s(z') dz' = w_s C_s^A \Delta t \quad (19)$$

Следовательно, вероятность, с которой частица должна оставаться в АС равна:

$$q = \frac{w_s C_0 \Delta t}{\int_0^{\Delta z_{bot}} p(z') C_s(z') dz'} \quad (20)$$

Найдем вероятность $p(z')$. Согласно алгоритму (4), частица, находящаяся на уровне z' в следующий момент времени может оказаться равномерно в интервале

$$z' \in [l_w + l_k - l_r; l_w + l_k + l_r], \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} l_w &= -w_s \Delta t, \\ l_k &= \frac{\partial K_z(z')}{\partial z} \Delta t, \\ l_r &= \sqrt{6K_z \Delta t}. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда согласно определению геометрической вероятности

$$p(z') = \frac{l_w + l_k - l_r - z'}{2l_r} \quad (23)$$

Вблизи дна коэффициент диффузии линейно растет в соответствии с соотношениями логарифмического слоя:

$$K(z') \approx \kappa u_* h_A + \kappa u_* z' \quad (24)$$

Разложим концентрацию $C_s(z')$ в ряд вблизи дна:

$$C_s(z') = C_s^A + \frac{\partial C_s^A(0)}{\partial z'} z' + O(z'^2) \quad (25)$$

Тогда используя условие (8) и отбрасывая в (25) члены второго порядка малости получим, что

$$C_s(z') = C_s^A - \frac{w_s C_a}{\kappa u_* h_A} z' \quad (26)$$

Толщина слоя Δz_{bot} определяется из соотношения:

$$\Delta z_{bot} = (l_r - l_w - l_k)|_{z=\Delta z_{bot}} \quad (27)$$

Подставляя (17,24) в (27) получим соотношение

$$\Delta z_{bot} = 2l_k + l_w + \sqrt{l_d^2 + 6l_w l_k + 3l_k^2} \quad (28)$$

С учетом (23), (26) получим окончательное выражение для вероятности осаждения частицы:

$$q = \frac{w_s C_0 \Delta t}{\frac{1}{2} I_1 - \frac{l_w + l_k}{2} I_2 - \frac{1}{2} I_3} \quad (29)$$

$$I_1 = \int_0^{\Delta z_{bot}} (C_0 + kz) dz = \Delta z_{bot} (C_0 + k\Delta z_{bot}/2)$$

$$I_2 = \int_0^{\Delta z_{bot}} \frac{(C_0 + kz)}{\sqrt{l_d^2 + 6l_k z}} dz \approx \frac{\Delta z_{bot} (C_0 + k\Delta z_{bot}/2)}{\sqrt{l_d^2 + 3l_k \Delta z_{bot}}}$$

$$I_3 = \int_0^{\Delta z_{bot}} \frac{z (C_0 + k_d z)}{\sqrt{l_d^2 + 6l_k z}} dz \approx \frac{\Delta z_{bot}^2 (C_0/2 + k\Delta z_{bot}/3)}{\sqrt{l_d^2 + 3l_k \Delta z_{bot}}}$$

Перенос влекомых наносов i -того класса в активном слое моделируется по формуле [13] с поправкой [11] на эффект наличия ила в АДС. Поток влекомых наносов является вектором

$$\vec{Q}_i = |Q_i| \frac{\vec{u}_b}{|u_b|}, \quad (30)$$

$$|Q_i|/p_{si} = \begin{cases} 0 & T_i < 0 \\ 0.053\sqrt{(s-1)g}D_i^{1.5}D_{*,i}^{-0.3}T_i^{2.1}, & 0 < T_i < 3 \\ 0.1\sqrt{(s-1)g}D_i^{1.5}D_{*,i}^{-0.3}T_i^{1.5}, & T_i > 3 \end{cases}$$

Перенос влекомых наносов рассчитывался лагранжевым методом для каждого конечного элемента дна. Частица перемещается со скоростью:

$$U_{bi} = u_* \left(10 - 7\sqrt{\frac{\Theta_{cr}}{\Theta}} \right), \quad (31)$$

$$\Theta = \frac{u_*}{(s-1)gD_i} \quad (32)$$

Полное число частиц, движущихся в элементе дна рассчитывается по формуле:

$$N_{bi} = S_E \frac{|Q_i|}{V_p U_{bi}} \quad (33)$$

где S_E – площадь элемента поверхности, V_p – объем частицы. Это количество случайно выбранных частиц перемещается в заданном элементе и на каждом шаге во времени пересчитывается распределение частиц между элементами. Толщина активного слоя для каждой градации размеров остается постоянной во времени. Избыток частиц поглощается в активный донный слой или же новые частицы поступают в активный слой из активного донного при дивергенции потока влекомых наносов.

При $p_m < p_{m,cr}$ обмен песком и илом между дном и водой происходит независимо. Обмен илом

описывается направленным вверх эрозионным потоком $E^{(m)}$ и направленным вниз потоком выпадения ила $D^{(m)}$

$$w_s^{(m)} C^{(m)} + K_z \frac{\partial C^{(m)}}{\partial z} = -E^{(m)} + D^{(m)}, \quad (34)$$

где $w_s^{(m)}$ – скорость осаждения ила, $C^{(m)}$ – концентрация ила. Скорость осаждения ила зависит от размеров хлопьев (флоков) D_{floc} , образовавшихся в результате флокуляции и описывается формулой [15]

$$w_s^{(m)} = \frac{\rho_s - \rho_w}{18\mu} D_0^{3-n_f} \frac{D_{floc}^{n_f-1}}{1 + 0.15 \text{Re}_{floc}^{0.657}}, \quad (35)$$

n_f -фрактальная размерность, μ – динамическая вязкость, Re – число Рейнольдса флота

$$\text{Re}_{floc} = \frac{w_s D_{floc}}{\nu}. \quad (36)$$

Эволюция размеров флота рассчитывается с помощью лагранжевой модели [15]:

$$\frac{dD_{floc}}{dt} = k_A C_m^{(m)} G D_{floc}^{n_f-1} - k_B G^{q+1} (D_{floc} - D_0)^p D_{floc}^{2q+1}, \quad (37)$$

где k_A – параметр агрегации, а k_B – параметр дробления флоков, $C_m^{(m)}$ – массовая концентрация ила, $G = \sqrt{\varepsilon/\nu}$, ε – скорость диссипации энергии турбулентности, параметры $q = 1/2$ и $p = 3 - n_f$. В равновесном случае $dD_{floc}/dt = 0$ и для стоксового режима оседания получается упрощенная формула при $n_f = 2$ [15]

$$w_s^{(m)} = \frac{(\rho_s - \rho_w)gD_0^2}{18\mu} + \frac{k_A}{k_B} D_0 \frac{\rho_s - \rho_w}{18\nu} \frac{C_m^{(m)}}{\sqrt{G}}, \quad (38)$$

На основании лабораторных экспериментов [15] значения $k_A = 14.6 \text{ м}^2 \text{кг}^{-1}$, $k_B = 14000 \text{ с}^{1/2} \text{ м}^2$ для частиц ила с диаметром $D_0 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$.

При $u_* > u_{*ce}^{(m)}$ происходит вовлечение ила, описываемое формулой [16]

$$E^{(m)} = p_m E_0 \left(\frac{u_*^2 - u_{ce}^{(m)2}}{u_{ce}^{(m)2}} \right), \quad (39)$$

$$D^{(m)} = 0,$$

в котором изменение содержания ила учитывается множителем p_m . Здесь $u_{ce}^{(m)2} = \tau_{ce}^{(m)}/\rho_w$, $\tau_{ce}^{(m)}$ – критические динамическая скорость и напряжение трения для начала эрозии, соответственно, а $E_0 = \rho_m M$ – параметр эрозии, ρ_m – плотность ила.

Типичное значение эмпирической постоянной M равно 10^{-7} . В режиме несвязных наносов частицы ила легко смываются с поверхности грунта [19] и $u_{*ce}^{(m)}$ должно быть много меньше, чем $u_{*cd}^{(m)}$ в режиме связанных наносов.

При $u_* < u_{*cd}^{(m)}$ поток ила выпадающего на дно описывается формулой Кроне [17]:

$$\begin{aligned} E^{(m)} &= 0, \\ D^{(m)} &= \frac{w_s^{(m)} C^{(m)}}{H} \left(1 - \frac{u_*^2}{u_{cd}^{(m)2}} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

когда концентрация ила в водном столбе $C^{(m)} < C_0^{(m)}$. Здесь $u_{cd}^{(m)2} = \tau_{cd}^{(m)} / \rho_w$, $\tau_{cd}^{(m)}$ – критическая динамическая скорость и критическое касательное напряжение для выпадения ила, соответственно, $C_0 = 0.3 \text{ кг м}^{-3}$ – критическая объемная концентрация ила.

Критическое напряжение трения для вовлечения и выпадения ила являются функциями плотности влажного грунта ρ_b [20]. Значения τ_e и τ_d изменяются в диапазоне 0.1–1.0 и 0.05–0.25 Н/м², соответственно.

1.4. Параметризация потока наносов между водным слоем и активным донным слоем в режиме связанных наносов

В режиме связанных наносов ($p_m \geq p_{m,cr}$), взмучивание как ила, так и песка при $u_* > u_{*ce}^{(m)}$ описывается формулой (39) с поправкой на содержание песка и ила:

$$\begin{aligned} E^{(m)} &= p_m E_0 \left(\frac{u_*^2 - u_{ce}^{(m)2}}{u_{ce}^{(m)2}} \right), \\ E_i^{(s)} &= p_{s,i} E_0 \left(\frac{u_*^2 - u_{ce}^{(m)2}}{u_{ce}^{(m)2}} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Предполагается, что процессы осаждения песка и ила происходят независимо и описываются соотношениями (29)–(40). Для режима связанных наносов транспорт влекомых наносов подавлен:

$$\vec{Q}_i^{(s)} = 0. \quad (42)$$

Уровень дна изменяется в зависимости от процессов взмучивания/осаждения и транспорта влекомых наносов

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_s} \sum_{i=1}^n \left(\nabla \vec{Q}_i^{(s)} - E_i^{(s)} + D_i^{(s)} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\rho_m} (E^{(m)} + D^{(m)}), \end{aligned} \quad (43)$$

Изменение содержания i -той фракции песка определяется уравнением

$$\rho_s (1 - \varepsilon) \frac{\partial p_{si} \zeta}{\partial t} = \nabla \vec{Q}_i^{(s)} - E_i^{(s)} + D_i^{(s)}. \quad (44)$$

1.5. Взаимодействие поля течений и взвесенесущих потоков

Взаимодействие течений и взвесенесущих потоков упрощенно описывается на уровне средних полей. Во-первых, переформирование дна, описываемое ((43)), влияет на поля течений. Во-вторых, в водном слое изменяется плотность смеси вода-взвесь, меняя тем самым силы плавучести, влияющие на поля течений и на турбулентные потоки.

Описанная выше модель переноса взвеси была сопряжена с трехмерной гидростатической моделью [21] и ее негидростатическим расширением [22,23]. Особенностью этих моделей является использование σ -координаты, связанной с вертикальной координатой z соотношением

$$\sigma = \frac{z - H}{\eta - H}; \quad (45)$$

где η – отклонение уровня от невозмущенного значения $z = 0$, $H(x, y, t) = H_0(x, y) - \zeta$, где $H_0(x, y)$ – начальная глубина. Применение σ -координаты позволяет проводить расчеты при эволюционирующем во времени за счет эрозии/осаждения рельефе дна. Плотность смеси ρ_m рассчитывалась следующим образом

$$\rho_m = \sum_{i=0}^N C_{si} + \rho_w \left(1 - \sum_{i=0}^N C_{si} / \rho_{si} \right), \quad (46)$$

$\rho_w(T, S, P)$ – плотность морской воды как функция температуры T , солености S и давления P ; ρ_{si} – плотность фракций взвеси.

2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

2.1. Развитие слоя взвешенных наносов в горизонтально однородном потоке

Рассмотрим задачу о взмучивании одного класса несвязных наносов в горизонтально однородном канале. Соответствующая постановка эйлеровой задачи имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + w_s \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (47)$$

$$z = a - H : K_z \frac{\partial C}{\partial z} = w_s C_a; \quad (48)$$

$$z = 0 : K_z \frac{\partial C}{\partial z} = w_s C; \quad (49)$$

$$t = 0 : C = 0. \quad (50)$$

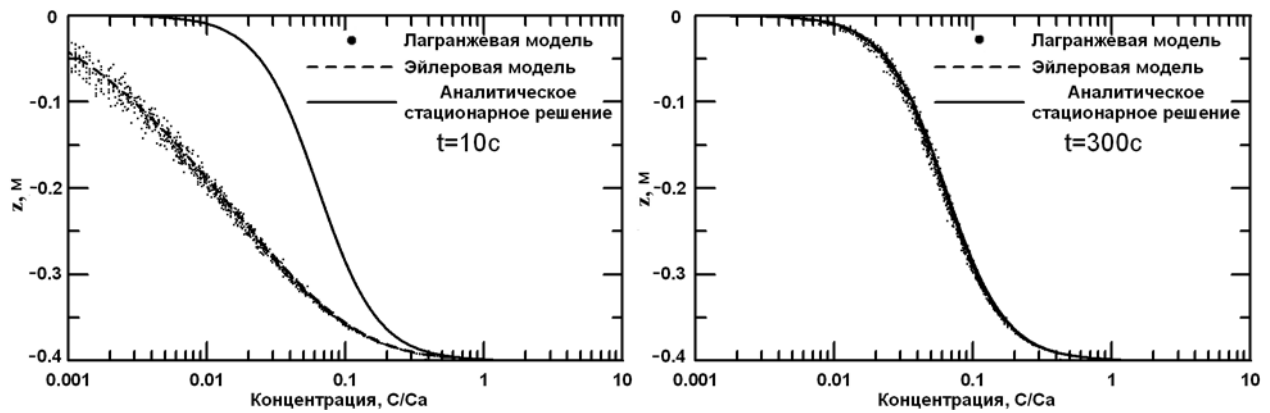


Рис. 2. Сравнение профилей взвешенных наносов рассчитанных лагранжевой и эйлеровой моделями в различные моменты времени.

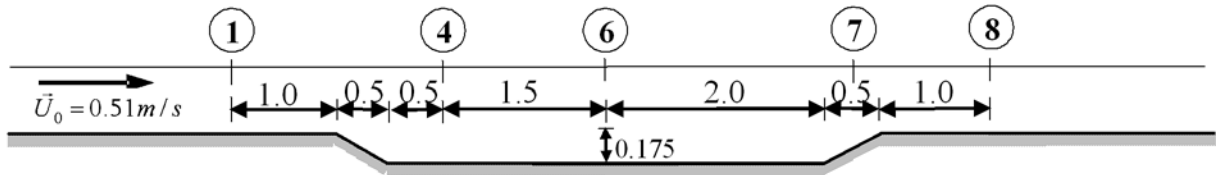


Рис. 3. Схема эксперимента [9]. Цифры в кружках соответствуют положению сечений, в которых производились измерения скорости течения и концентрации взвеси

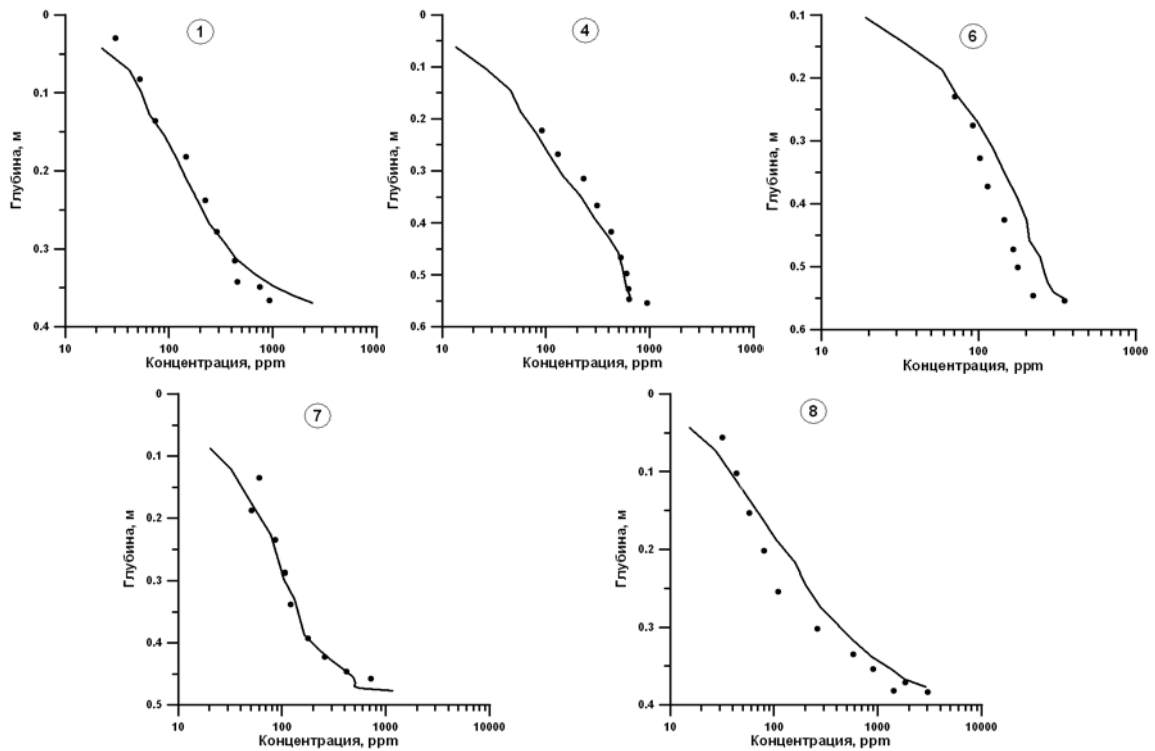


Рис. 4. Сравнение рассчитанных и измеренных [9] профилей концентрации взвеси

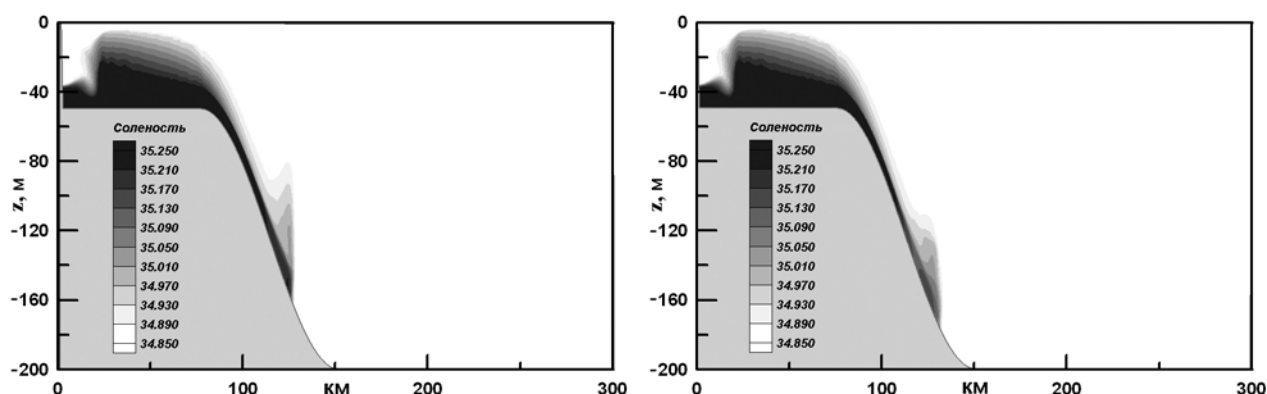


Рис. 5. Вертикальный разрез солёности в гравитационном течении на склоне при $t = 2.5$ сут., возникшем в результате термохалинной шельфовой конвекции (а) и термохалинной конвекции со взмучиванием донных наносов на склоне

Профиль коэффициента вертикальной диффузии задан в виде:

$$K(z) = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{H}\right).$$

Уравнение (47) имеет аналитическое стационарное решение (профиль Рауза).

$$C(z) = C_a \left(\frac{h-z}{z} \frac{a}{h-a} \right)^{\frac{w_s}{\kappa u_*}}. \quad (51)$$

Нестационарное аналитическое решение уравнения (47) с несколько иными граничными условиями ($C = C_a$ при $z = a - H$) было найдено [24]. Здесь мы получили решение эйлеровой задачи (47)-(50) численно с использованием конечно-разностного метода, неявной схемы и метода прогонки. Параметры расчетов: $H = 0.4$ м, $u_* = 0.05$ м/с, $C_a = 1$ кг/м, $w_s = 0.01$ м/с, $\kappa = 0.4$, $m_p = 3 \cdot 10^{-8}$ кг. В лагранжевых расчетах использовалось до 1000 000 частиц. Как следует из Рис.2, лагранжева модель хорошо согласуется с численной эйлеровой моделью и достаточно точно воспроизводит аналитическое решение (51).

2.2. Лабораторный эксперимент

Были проведены расчеты для условий лабораторного эксперимента [9], в котором моделировалась заносимость судоходного канала. Эксперимент проводился в лотке длиной 30 м, шириной 0.5 м и глубиной 0.7 м. Профиль дна рабочего участка и положение профилей измерений приведены на рис. 3. Слой наносов на дне состоял из фракции мелкого песка диаметром 0.13 мм со скоростью осаждения 0.013 м/с. Скорость потока на входе в лоток была 0.5 м/с, а глубина слоя воды – 0.4 м.

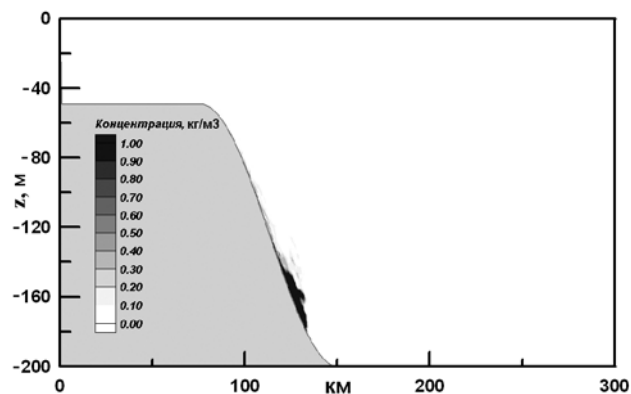


Рис. 6. Вертикальный разрез концентрации взвеси в гравитационном течении на склоне при $t = 2.5$ сут., возникшем в результате термохалинной конвекции со взмучиванием донных наносов на склоне

Взвешенный песок той же фракции поступал на входе, формируя равновесный профиль. В эксперименте эффективная шероховатость $k_s = 0.025$ м. Течения моделировались с помощью трехмерной гидростатической модели РОМ [21]. В расчетах горизонтальное разрешение составляло 5 см. По вертикали использовалось 21 сигма-уровень со сгущением у дна. Полное число лагранжевых частиц во взвешенных и влекомых наносах составляло около 30000. Временной шаг гидродинамической модели составлял 0.0025 с, тогда как шаг лагранжевой модели был в пять раз меньше. На рис.4 приведены измеренные и рассчитанные профили концентрации взвешенных наносов в среднем сечении лотка в точках, показанных на рис.3. Мгновенная концентрация на профиле была осреднена по интервалу 100 с. Как следует из рис.4, результаты измерений и расчетов неплохо согласуются.

2.3. Моделирование гравитационных взвесенесущих течений, вызванных конвекцией на шельфе

Модель была применена исследованию возникновения гравитационных взвесенесущих течений на склонах в результате шельфовой конвекции в океане [25]. Шельфовая конвекция представляет собой распространенное явление в полярных областях океана, когда в результате зимней конвекции проникающей до дна относительно мелкого шельфа плотность воды над шельфом оказывается больше, чем в открытом океане, где конвекция охватывает более глубокие слои. Возникающий градиент плотности приводит к гравитационному течению более плотной воды в глубинные слои океана течений. Этот поток может мобилизовать тонкодисперсную наносы на склоне, что в свою очередь может усилить плотностные гравитационные течения за счет взвеси. Эта проблема рассматривалась в ряде работ, начиная с [3]. Здесь мы рассмотрим относительно простую двумерную задачу о возбуждении взвесенесущих потоков плотностным гравитационным течением на склоне между узким шельфом глубиной 50 м и морем глубиной 200 м. Параметры задачи соответствуют идеализированному описанию конвекции на шельфе Новой Земли в Баренцевом море [25]. Использовалась сопряженная система уравнений лагранжевой модели и гидростатической модели РОМ [21]. Эффекты вращения Земли не учитывались. Начальная температура и соленость воды на шельфе $T = -2^{\circ}\text{C}$ и $S = 34.8$, соответственно. Температура и соленость воды в открытом море $T = 0^{\circ}\text{C}$ и $S = 34.3$, соответственно. Предполагается, что шельф и склон покрыты илом с диаметром частиц $6 \cdot 10^{-6}$ м и скоростью оседания $1.9 \cdot 10^{-6}$ м/с. Критические напряжения взмучивания и оседания равны 0.095 Н/м^2 .

Результаты расчетов представлены на рис.5-7. На рис.5 приведены вертикальные разрезы солености в гравитационном течении на склоне через 2.5 суток после начала, которое возникло в результате только термохалинной шельфовой конвекции и термохалинной конвекции со взмучиванием донных наносов на склоне. Соответствующий вертикальный разрез концентрации взвеси представлен на рис. 5. Как видно на рисунке 5 взмучивание приводит к увеличению сил плавучести и ускорению движения головы течения (см. также рис.7). В то же время увеличение скорости гравитационного течения сопровождается дополнительным вовлечением окружающих вод в гравитационное течение. Поэтому по достижении подошвы склона

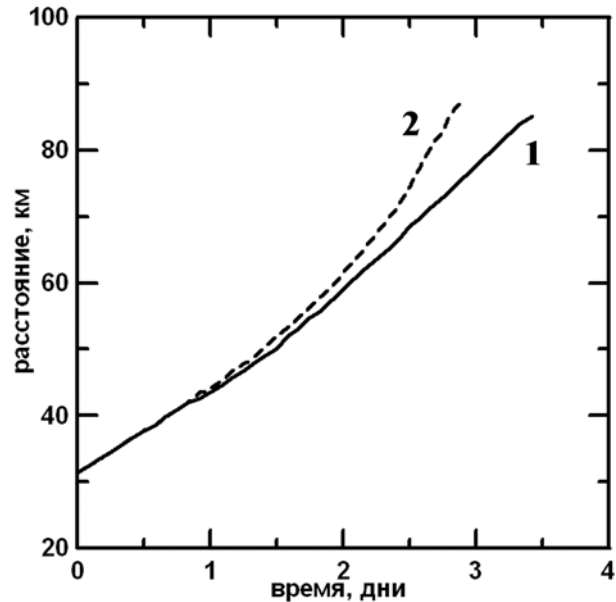


Рис. 7. Положение фронта гравитационного течения со временем. Термохалинная конвекция (1) и термохалинная конвекция со взмучиванием донных наносов на склоне (2)

плотность воды в потоке будет меньше, чем в случае только термохалинного плотностного гравитационного течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведена новая трехмерная лагранжева модель, которая описывает перенос смеси связанных и несвязанных многофракционных наносов. Тип донного материала и его гранулометрический состав могут быть переменными в области моделирования. Метод RDM применяется для моделирования переноса взвешенных наносов. Модель воспроизводит основные процессы переноса взвешенных и влекомых наносов и переформирования дна, включая эффекты самоотмостки. Приведен вывод вероятности осаждения несвязанных наносов в зависимости от характеристик турбулентности и скорости осаждения частиц наносов. Результаты расчетов неплохо согласуются с аналитическим и численным решениями для эйлеровой модели и с данными лабораторного эксперимента. Модель была применена исследованию возникновения гравитационных взвесенесущих течений на склонах в результате шельфовой конвекции в океане. Эта модель может быть особенно полезна для расчетов локального переформирования дна вокруг препятствий, моделирования дноуглубительных ра-

бот или размыва дна под воздействием струй от судовых движителей или волн при прохождении судов.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке US CRDF (проект UKG2-582-KV-05) и INTAS (проект 03-50-4620). The work of V. Maderich was supported by Hankuk University of Foreign Studies Research Fund of 2007.

ЛИТЕРАТУРА

- Huppert H.E. Gravity currents: a personal perspective // J. Fluid Mech.– 2006.– **554**.– P. 299–322.
- Chao S.-Y. Hypertypical and buoyant plumes from a sediment-laden rivers // J. Geoph. Res.– 1998.– **103**.– P. 3067–3081.
- Fohrmann, H., Backhaus, J. O., Blaume, F., Rumohr, J. Sediments in bottom arrested gravity plumes-numerical case studies // J. Phys. Oceanogr.– 1998.– **28**.– P. 2250–2274.
- Gessler D., Hall, B., Spasojevic M., Holly F., Pourtaheri H., Raphael N. Application of 3D mobile bed, hydrodynamic model // J. Hyd. Engr.– 1999.– **125**.– P. 737–749.
- Lesser G.R., Roelvink J.A., van Kester J.A.T.M., Stelling G. Development and validation of a three-dimensional morphological model // Coastal Eng.– 2004.– **51**.– P. 883–915.
- Lane A. Development of a Lagrangian sediment model to reproduce the bathymetric evolution of the Mersey Estuary // Ocean Dynamics.– 2005.– **55**.– P. 541–548.
- Krestenitis Y. N. , Kombiadou K. D. , Savvidis Y. G. Modelling the cohesive sediment transport in the marine environment: the case of Thermaikos Gulf. // Ocean Sci.– 2007.– **3**.– P. 91–104.
- Бровченко И. А., Мадерич В.С. Двумерная лагранжева модель переноса многофракционных наносов // Прикладная гидромеханика.– 2006.– **8**.– P. 205–230.
- Van Rijn, L. C. Mathematical modeling of sediment in non-uniform flows // J. Hydr. Eng. ASCE.– 1986.– No 6.– P. 433–455.
- Van Ledden M. A process based sand-mud model., Fine sediment dynamics in the marine environment // Fine sediment dynamics in the marine environment. J.C. Winterwerp and C. Kranenburg eds.– Elsevier, 2002.– P. 577–594.
- Van Ledden M Sand-mud segregation in estuaries and tidal basins.– PhD Thesis: Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 2003.– 221 p.
- Wilson J. D., Sawford B. L. Review of Lagrangian stochastic models for trajectories in the turbulent atmosphere // Bound.-Layer Meteor.– 1996.– **78**.– P. 191–210.
- Van Rijn L. C. Sediment transport, Part I: Bed load transport // J. Hyd. Engr.– 1984.– **110**.– P. 1431–1455.
- Van Rijn L. C. Sediment transport, Part II: Suspended load transport // J. Hyd. Engr.– 1984.– **110**.– P. 1613–1641.
- Winterwerp J.C. 1999. On the dynamics of high-concentrated mud suspensions.– PhD Thesis: Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1999.– 204 p.
- Partheniades E. Erosion and deposition of cohesive soil // J. Hydr. Div. ASCE.– 1965.– **91**.– P. 105–139.
- Krone R. B. Flume Studies of the Transport of Sediment in Estuarial Processes.– Final Report: Hydraulic Engineering Laboratory and Sanitary Engineering Research Laboratory, University of California, Berkeley, 1962.– 120 p.
- Ariathurai R., Krone R. B. Finite element model for cohesive sediment transport // J. Hydr. Div. ASCE.– 1976.– **104**.– P. 323–328.
- Torfs H., Mitchener H., Huysentruit H., Toorman E. Settling and consolidation of mud/sand mixtures // Coastal Eng.– 1996.– **29**.– P. 27–45.
- Hwang, K.-N, Mehta A. J. Fine sediment erodibility in Lake Okeechobee.– Report UFL/COEL-89/019: Coastal and Oceanographic Engineering Dept., University of Florida, Gainesville, 1989.– 120 p.
- Mellor G.L. User's guide for a three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model. Program in Atmospheric and Oceanic Sciences.– Princeton NJ: Princeton University, 2003.– 53 p.
- Kanarska Y., Maderich V. A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // Ocean Dynamics.– 2003.– **53**.– P. 176–185.
- Brovchenko I., Kanarska Y., Maderich V., Terletska K. 3D non-hydrostatic modelling of bottom stability under impact of the turbulent ship propeller jet // Acta Geophysica.– 2007.– **55**.– P. 47–55.
- Hjelmfelt, A.T., Lenau, C.W. Nonequilibrium transport of suspended sediment // ASCE Journal of Hydraulic Division.– 1970.– No 7.– P. 1567–1586.
- Ivanov, V.V., Shapiro, G.I., Huthnance, J.M., Aleynik, D.L., Golovin, P.N. Dense water cascades around the world ocean // Progress in Oceanography.– 2004.– **60**.– P. 47–98.